Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 14 **SoSe 2018** **17./18.07.2018**

[P33] Bosonische und fermionische Statistik

Betrachten Sie zwei nicht-wechselwirkende, identische Teilchen mit den Koordinaten x_1 und x_2, welche sich im eindimensionalen, quadratischen Potential

$$V = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x_1^2 + x_2^2 \right)$$

bewegen. Eines der Teilchen befinde sich im Grundzustand, das andere im ersten angeregten Energie-Eigenzustand. Bestimmen Sie den Erwartungswert $\langle x_1 x_2 \rangle$ für folgende Fälle

(a) bosonische Teilchen,

(b) fermionische Teilchen,

(c) unterscheidbare Teilchen.

[P34] Parastatistik

Wir betrachten Dreiteilchenzustände, die sich unter Permutationen in der irreduziblen “2”-Darstellung der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_3$ transformieren. Gegeben seien dazu die Zustände (n, m, p seien alle verschieden)

$$\begin{aligned}
|\Psi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \Big(|mnp\rangle + \omega |npm\rangle + \bar{\omega} |pmn\rangle \Big) \,, \\
|\Psi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \Big(|nmp\rangle + \omega |pnm\rangle + \bar{\omega} |mpn\rangle \Big) \,, \\
|\Phi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \Big(|nmp\rangle + \bar{\omega} |pnm\rangle + \omega |mpn\rangle \Big) \,, \\
|\Phi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \Big(|mnp\rangle + \bar{\omega} |npm\rangle + \omega |pmn\rangle \Big) \,,
\end{aligned} \tag{1}$$

wobei $\omega = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/3} = (-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})/2$ und $\bar{\omega} = \omega^2 = \omega^{-1} = (-1 - \mathrm{i}\sqrt{3})/2$ dritte Einheitswurzeln sind. Diese Zustände sind normiert und orthogonal zueinander.

(a) Geben Sie die bosonischen und fermionischen Dreiteilchenzustände an und zeigen Sie, dass diese orthogonal zu den oben angegebenen Zuständen sind. (Es genügt jeweils eine Beispielrechnung.)

(b) Überlegen Sie sich das Transformationsverhalten der Zustände $|\Phi_\pm\rangle$ unter der zyklischen Transformation $|123\rangle \to |312\rangle$ sowie unter der Vertauschung $|123\rangle \to |213\rangle$.

Bitte wenden

[P35] Fockraum für Parafermionen

Betrachten Sie hypothetische Teilchen mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$(a^\dagger)_{mn} = (a)_{nm} = \delta_{m,n+1}\sqrt{m(3-n)/3} \quad \text{für} \quad 0 \le n, m \le 3.$$

Der Erzeugungsoperator $a^\dagger$ erzeugt also ein Teilchen, während a entsprechend ein Teilchen vernichtet.

(a) Zeigen Sie, dass $(a^\dagger)^4 = 0$.

(b) Zeigen Sie

$$(a^\dagger a)_{mn} = \delta_{m,n}\, m(4-m)/3 \quad \text{und} \quad (a\, a^\dagger)_{mn} = \delta_{m,n}\, (m+1)(3-m)/3,$$

und berechnen Sie die Matrixelemente des Teilchenzahloperators

$$N := \frac{3}{2}(a^\dagger a - a\, a^\dagger + \mathbf{1})\,.$$

Hat N die "richtigen" Eigenwerte?